Exercice 1 1. Montrer que, si X est une variable réelle, $\mathbb{E}\left\{(X-\mathbb{E}(X))^2\right\} = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$.

2. Montrer que si $X = (X_1, \ldots, X_n)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^n$ on a

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_i \lambda_j \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$$

En déduire que la matrice symétrique $\Gamma = (\mathrm{Cov}(X_i, X_j))_{1\leq i,j\leq n}$ est une matrice positive (i.e. $x.\Gamma x \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$).

3. Montrer que la matrice de covariance est dégénérée (i.e. elle admet un noyau non réduit à $\{0\}$) si et seulement si le vecteur X prend ses valeurs dans un hyperplan affine strict de $\mathbb{R}^n$.

4. Soit ρ un nombre réel compris entre -1 et 1, à quelle condition sur ρ la matrice Γ, $n \times n$ suivante

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho & \ldots & \rho \\ \rho & 1 & \rho & \ldots & \rho \\ \rho & \rho & 1 & \ldots & \rho \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \rho & \rho & \ldots & \rho & 1 \end{pmatrix}$$

peut elle être la matrice de covariance d'un vecteur aléatoire ?

5. On suppose $\rho \geq 0$ et on considère $(G_1, \ldots, G_n, G)$, $n+1$ variables aléatoires indépendantes centrées de variance 1. Comment construire un vecteur aléatoire $(X_1, \ldots, X_n)$ qui a pour matrice de variance covariance Γ ?

Exercice 2 Soit un couple de variables aléatoires (X, Y) tel que $\mathbb{P}(X \leq Y) = 1$[1].

1. Si X et Y representent des rendements de portefeuille, laquelle de ces deux variables aléatoires vous paraît naturellement préférable ?
2. Donner un exemple de couple de variables aléatoires (X, Y) tel que $X \leq Y$ p.s., avec (bien sûr !) $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$, mais telles que $\mathrm{Var}\,(X) < \mathrm{Var}\,(Y)$.

   Ces deux variables aléatoires *ne seront pas comparables pour l'ordre partiel sur les gains de portefeuille* défini dans le cours[2].
3. En quoi cela questionne t'il le choix de l'ordre partiel introduit dans la modèlisation du portefeuille proposée par Markowitz ?

Exercice 3 Soit Γ une matrice symétrique définie positive. Montrer que $\phi(x, y) = x^T \Gamma y$ est un produit scalaire. On note $\|x\|_\Gamma = \sqrt{x^T \Gamma x}$ la norme associée.

1. (Re)-démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$|x^T \Gamma y| \leq \|x\|_\Gamma \|y\|_\Gamma$$

1. Remarquez que pour savoir si $\mathbb{P}(X \leq Y) = 1$, il faut connaître la loi du couple (X, Y).
2. Notez que cet ordre partiel ne suppose la connaissance que de la loi de X et de celle de Y (et non celle du couple (X, Y) comme précédemment).

2. En déduire que :

$$r^T\lambda \leq \sqrt{r^T\Gamma^{-1}r} \times \sqrt{\lambda^T\Gamma\lambda}.$$

Puis que

$$\sup_{\lambda, \sum_{i=1}^d \lambda_i = 1} \frac{r^T\lambda}{\sqrt{\lambda^T\Gamma\lambda}} \leq \sqrt{r^T\Gamma^{-1}r}$$

et que l'égalité est atteinte pour $\lambda = \Gamma^{-1}r/(\mathbf{1}\,\Gamma^{-1}r)$ où $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1)$